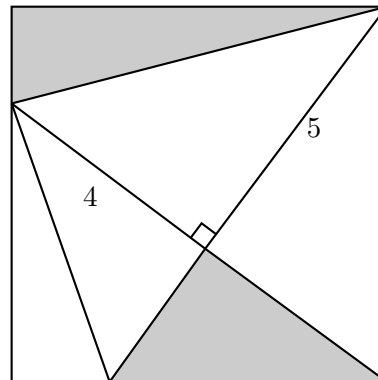


## XII Copa Cangur - Final

### Categoria Junior - Solucions

- Les respostes a tots els problemes són nombres enters de, com a màxim, quatre xifres i sense unitats de mesura.
- Si algun problema no té solució, la resposta que heu de lliurar és 0000 (si la solució és 0, també heu de lliurar 0).
- Si en un problema s'utilitza només un tipus d'unitat, se sobreentén que la resposta ha d'estar en aquestes mateixes unitats, o en aquestes unitats quadrades o cúbiques.
- Les figures que es mostren no estan necessàriament a escala per les dades que es donen.
- Les mesures angulars s'expressen sempre en graus sexagesimals.
- Els zeros a l'inici d'un nombre enter no compten com a xifres del nombre. És a dir, 00672 és un nombre de 3 xifres i no de 5.

1. En un quadrat hi hem traçat alguns segments tal com es veu a la figura, de manera que ens ha quedat un triangle rectangle de catets 4 cm i 5 cm. Quant val l'àrea total de les dues regions ombrejades?



**Solució: 10**

2. La següent equació té una única solució entera. Quina és?

$$(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)(x - 9)(x - 11) + 225 = 0$$

**Solució: 6**

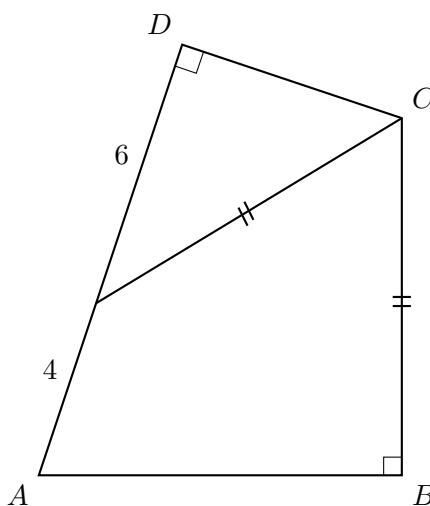
3. Un nombre enter positiu s'anomena nombre en ziga-zaga si compleix les tres condicions següents:

- Les seves xifres són diferents de zero i són totes diferents.
- No té tres xifres seguides en ordre ascendent.
- No té tres xifres seguides en ordre descendent.

Per exemple, 14385 i 2917 són nombres en ziga-zaga però 2564 i 71544 no ho són. Quants nombres en ziga-zaga hi ha de quatre xifres?

**Solució: 1260**

4. A la figura hi podeu veure un quadrilàter  $ABCD$  i un segment que va del vèrtex  $C$  al costat  $AD$ . Els dos segments marcats tenen la mateixa longitud, i hi ha dos angles rectes que també els teniu marcats a la figura. El costat  $AD$  ha quedat dividit en dos segments de longituds 4 cm i 6 cm. Quant mesura el costat  $AB$ ?



**Solució: 8**

5. Quants nombres de 6 xifres compleixen les tres condicions següents?

- El dígit 0 no hi apareix.
- La suma de les dues primeres xifres és igual al nombre format per les dues últimes.
- El nombre format per les dues xifres centrals és la suma de les dues primeres xifres més 1.

Com, per exemple, el nombre 651211 ( $6 + 5 = 11$ ;  $6 + 5 + 1 = 12$ ).

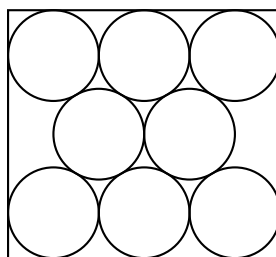
**Solució: 36**

6. Anomenem "quasicapicua" a un nombre que si sumem 1 a una i només a una de les seves xifres, de manera que les altres no canviïn, resulta un número capicua. Quants nombres "quasicapicua" de quatre xifres hi ha?

**Solució: 332**

---

7. Un rectangle alberga vuit cercles tots del mateix radi. Alguns cercles són tangents entre ells i/o tangents als costats del rectangle tal com es veu a la figura. El costat horitzontal del rectangle fa  $30(\sqrt{3} - 1)$  cm. Quant mesura el costat vertical?



**Solució: 20**

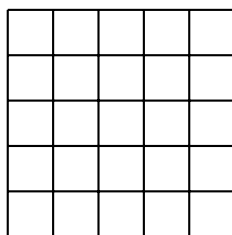
---

8. Si  $f(x) = x^2 - bx + 9$ , amb  $b > 0$ , quin és el valor de  $b$  que fa que l'equació  $f(x) \cdot f(x+k) = 0$  tingui exactament dues solucions reals diferents quan  $k \neq 0$ ?

**Solució: 6**

---

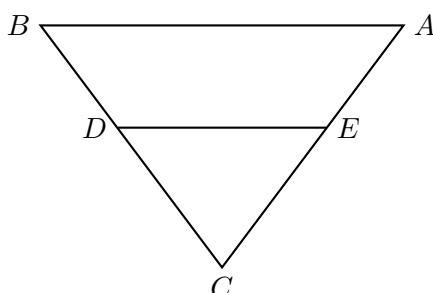
9. Si a una quadrícula formada per 25 quadradets com la de la figura hi dibuixem tots els segments corresponents a unir 2 punts qualssevol entre ells, quantes mesures diferents tindran aquests segments?



**Solució: 19**

---

10. Al triangle  $ABC$  hi tracem un segment  $DE$  paral·lel a  $AB$  tal com es veu a la figura, de manera que l'àrea de  $DCE$  és la meitat de la del trapezi  $ABDE$ . Si sabem que el costat  $AB$  fa 45 cm, quina seria l'àrea d'un quadrat de costat  $DE$ ?



**Solució: 675**

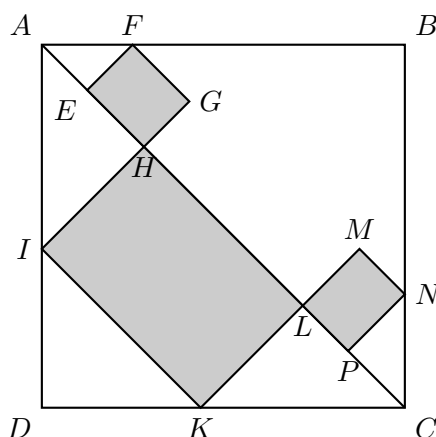
11. Tenim tres nombres  $a, b, c$  que compleixen que  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 2025$ . Quin és el valor de  $(1 + \frac{b}{a})(1 + \frac{a}{c})(1 + \frac{c}{b})$ ?

**Solució: 2027**

12. Un nombre enter positiu de tres xifres s'anomena alegre si, dividint-lo per la suma dels seus dígit, dona 19. Quina és la suma de tots els nombres alegres?

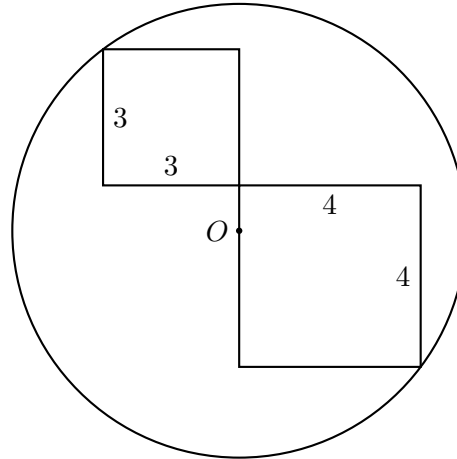
**Solució: 2394**

13. A la figura,  $ABCD$  és un quadrat mentre que  $EFGH$ ,  $HIKL$  i  $LMNP$  són simplement rectangles. El costat  $AB$  del quadrat mesura  $16\sqrt{2}$  cm i el segment  $ID$  mesura  $6\sqrt{2}$  cm. Quin és el perímetre de la regió ombrejada, en centímetres?



**Solució: 84**

14. Es dibuixen dos quadrats de costats 3 cm i 4 cm dins d'una circumferència utilitzant 6 segments com es veu a la figura, de manera que el centre de la circumferència és sobre el costat del quadrat més gran. Quant mesura el radi de la circumferència?



**Solució: 5**

---