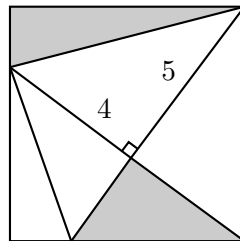


## XII Copa Cangur - Final Categoria Junior

- Les respostes a tots els problemes són nombres enters de, com a màxim, quatre xifres i sense unitats de mesura.
- Si algun problema no té solució, la resposta que heu de lliurar és 0000 (si la solució és 0, també heu de lliurar 0).
- Si en un problema s'utilitza només un tipus d'unitat, se sobreentén que la resposta ha d'estar en aquestes mateixes unitats, o en aquestes unitats quadrades o cúbiques.
- Les figures que es mostren no estan necessàriament a escala per les dades que es donen.
- Les mesures angulars s'expressen sempre en graus sexagesimals.
- Els zeros a l'inici d'un nombre enter no compten com a xifres del nombre. És a dir, 00672 és un nombre de 3 xifres i no de 5.

1. En un quadrat hi hem traçat alguns segments tal com es veu a la figura, de manera que ens ha quedat un triangle rectangle de catets 4 cm i 5 cm. Quant val l'àrea total de les dues regions ombrejades?



2. La següent equació té una única solució entera. Quina és?

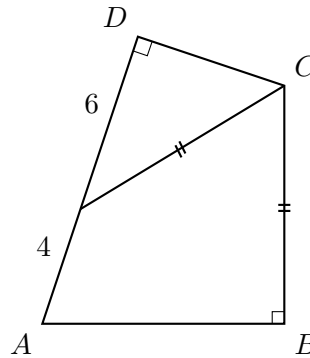
$$(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)(x - 9)(x - 11) + 225 = 0$$

3. Un nombre enter positiu s'anomena nombre en ziga-zaga si compleix les tres condicions següents:

- a) Les seves xifres són diferents de zero i són totes diferents.
- b) No té tres xifres seguides en ordre ascendent.
- c) No té tres xifres seguides en ordre descendent.

Per exemple, 14385 i 2917 són nombres en ziga-zaga però 2564 i 71544 no ho són. Quants nombres en ziga-zaga hi ha de quatre xifres?

4. A la figura hi podeu veure un quadrilàter  $ABCD$  i un segment que va del vèrtex  $C$  al costat  $AD$ . Els dos segments marcats tenen la mateixa longitud, i hi ha dos angles rectes que també els teniu marcats a la figura. El costat  $AD$  ha quedat dividit en dos segments de longituds 4 cm i 6 cm. Quant mesura el costat  $AB$ ?



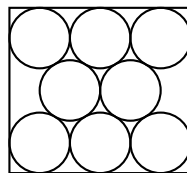
5. Quants nombres de 6 xifres compleixen les tres condicions següents?

- El dígit 0 no hi apareix.
- La suma de les dues primeres xifres és igual al nombre format per les dues últimes.
- El nombre format per les dues xifres centrals és la suma de les dues primeres xifres més 1.

Com, per exemple, el nombre 651211 ( $6 + 5 = 11$ ;  $6 + 5 + 1 = 12$ ).

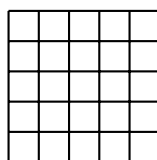
6. Anomenem "quasicapicua" a un nombre que si sumem 1 a una i només a una de les seves xifres, de manera que les altres no canviïn, resulta un número capicua. Quants nombres "quasicapicua" de quatre xifres hi ha?

7. Un rectangle alberga vuit cercles tots del mateix radi. Alguns cercles són tangents entre ells i/o tangents als costats del rectangle tal com es veu a la figura. El costat horitzontal del rectangle fa  $30(\sqrt{3} - 1)$  cm. Quant mesura el costat vertical?

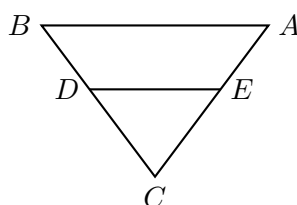


8. Si  $f(x) = x^2 - bx + 9$ , amb  $b > 0$ , quin és el valor de  $b$  que fa que l'equació  $f(x) \cdot f(x+k) = 0$  tingui exactament dues solucions reals diferents quan  $k \neq 0$ ?

9. Si a una quadrícula formada per 25 quadradets com la de la figura hi dibuixem tots els segments corresponents a unir 2 punts qualssevol entre ells, quantes mesures diferents tindran aquests segments?



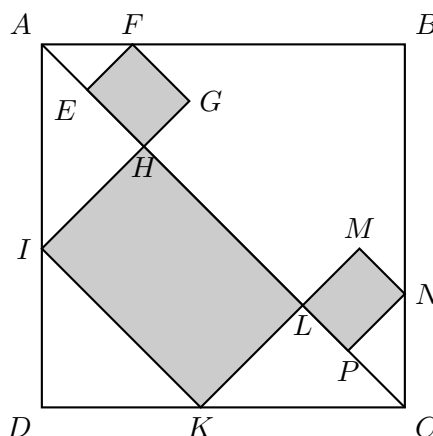
10. Al triangle  $ABC$  hi tracem un segment  $DE$  paral·lel a  $AB$  tal com es veu a la figura, de manera que l'àrea de  $DCE$  és la meitat de la del trapezi  $ABDE$ . Si sabem que el costat  $AB$  fa 45 cm, quina seria l'àrea d'un quadrat de costat  $DE$ ?



11. Tenim tres nombres  $a, b, c$  que compleixen que  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 2025$ . Quin és el valor de  $(1 + \frac{b}{a})(1 + \frac{a}{c})(1 + \frac{c}{b})$ ?

12. Un nombre enter positiu de tres xifres s'anomena alegre si, dividint-lo per la suma dels seus dígit, dona 19. Quina és la suma de tots els nombres alegres?

13. A la figura,  $ABCD$  és un quadrat mentre que  $EFGH$ ,  $HIKL$  i  $LMNP$  són simplement rectangles. El costat  $AB$  del quadrat mesura  $16\sqrt{2}$  cm i el segment  $ID$  mesura  $6\sqrt{2}$  cm. Quin és el perímetre de la regió ombrejada, en centímetres?



14. Es dibuixen dos quadrats de costats 3 cm i 4 cm dins d'una circumferència utilitzant 6 segments com es veu a la figura, de manera que el centre de la circumferència és sobre el costat del quadrat més gran. Quant mesura el radi de la circumferència?

